ISARA Lyon Durée 1h

UP SFO- S4 – UE : Statistique

Examen N°3 (25%) partie 17–juin 2013

Mme Bottollier Lemallaz CORRIGE EN BLEU

Conditions d’examen : **Documents**: Tables statistiques autorisées

**Calculatrice** : non programmable

Remarques importantes :

1. A la fin de l’épreuve vous devez rendre les 4 pages du sujet complétées de façon lisible et propre.
2. Sauf indication contraire, vous présenterez les résultats finaux avec 3 chiffres significatifs.

**Nom :……………………………………………………………….Prénom :……………………………………………….Note sur 20 :……….**

**Evaluation du cours (4 points) (10 min):**

1. Formule du calcul des coefficients d’un modèle de régression linéaire multiple :

B = (U’U)-1 U’Y ……………………………………………….

1. Formule du calcul de la matrice de dispersion : = (U’U)-1……
2. Soit un modèle de régression linéaire multiple du 1er degré à k facteurs (j = 1 à k) établi à partir de n essais (i = 1 à n) expliciter la matrice d’information associée à ce modèle : dimension et termes qui la constituent en respectant la notation indicielle.

Modèle : y**^**i = 0 + 1 Ui1 + 2 Ui2 +....+ j Uij +.....+ k Uik ……………………………………………….

Dimension de la matrice des effets: Dim U = [n ; k+1] ……………………………………………….

Termes de la matrice d’information : Dim U’U = [k+1; k+1]

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| n | ΣU1 | ΣU2 | ..... | ΣUj | ..... | ΣUk |
| ΣU1 | ΣU1² | ΣU1 U2 | …. | Σ U1Uj | …. | ΣU1 Uk |
| ΣU2 | ΣU2 U1 | ΣU2² | …. | Σ U2Uj | …. | ΣU2 Uk |
| …. | …. | …. | …. | …. | …. | …. |
| ΣUj | ΣUj U1 | ΣUj U2 | …. | ΣUj² | …. | Σ Uj Uk |
| …. | …. | …. | …. | …. | …. | …. |
| ΣUk | ΣUk U1 | ΣUk U2 | …. | ΣUk Uj | …. | ΣUk² |

**Contexte de l’étude pour les exercices qui suivent. Les exercices restent indépendants.**

But de l’étude

Dans une production de tablettes de chocolat, un certain nombre de tablette se brisent quand elles arrivent à l’emballage. L’objectif est d’identifier le type de tablettes génératrices de ces pertes. Pour cela, on mesure les taux de refonte de plusieurs fabrications (rapport entre la quantité cassée et la quantité produite). En fonction des résultats de l’étude, on pourra cibler sur quel type de production il faudra apporter des actions correctives.

Facteurs

U1 : Pourcentage de pate de cacao PC (0%; 50%) codées X1 (-1 ; +1)

U2 : Format de la plaquette FP (100g ; 200g) codées X2(-1 ; +1)

U3 : Température de tablage (22°C ; 26°C) codées X3 (-1 ; +1)

Réponse Y: Taux de refonte que l’on cherche à minimiser.

**Exercice 1 (10 points) (35 min) :**

1. A partir du tableau ci-dessous, calculer b0 au 1/1000ème et écrivez l’équation du modèle obtenu avec les valeurs numériques.

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Fabrication N° | X1 | X2 | X3 | Yi | Y^i | ei |
| 1 | 1 | 1 | -1 | 29,9 | 29,906 | -0,006 |
| 2 | -1 | 1 | 1 | 30,6 | 30,806 | -0,206 |
| 3 | 1 | -1 | 1 | 29,7 | 29,772 | -0,072 |
| 4 | -1 | -1 | -1 | 29,8 | 29,739 | 0,061 |
| 5 | 1 | 1 | -1 | 29,9 | 29,906 | -0,006 |
| 6 | -1 | 1 | 1 | 30,8 | 30,806 | -0,006 |
| 7 | 1 | -1 | 1 | 29,9 | 29,772 | 0,128 |
| 8 | -1 | -1 | -1 | 29,8 | 29,739 | 0,061 |
| 9 | 1 | 1 | -1 | 30,0 | 29,906 | 0,094 |
| 10 | -1 | 1 | 1 | 31,1 | 30,806 | 0,294 |
| 11 | 1 | -1 | 1 | 29,8 | 29,772 | 0,028 |
| 12 | -1 | -1 | -1 | 29,7 | 29,739 | -0,039 |
| 13 | 0 | 0 | 0 | 29,1 | 30,056 | -0,956 |
| 14 | 0 | 0 | 0 | 30,1 | 30,056 | 0,044 |
| 15 | 0 | 0 | 0 | 30,9 | 30,056 | 0,844 |
| 16 | 0 | 0 | 0 | 29,2 | 30,056 | -0,856 |
| 17 | 0 | 0 | 0 | 30,4 | 30,056 | 0,344 |
| 18 | 0 | 0 | 0 | 30,3 | 30,056 | 0,244 |
| **bj** | **-0.2167** | **0.3000** | **0.2333** |  |  |  |
| somme | 0 | 0 | 0 | 541 | 541 | 0 |
| somme des carrés | 12 | 12 | 12 | 16265.060 | 16262.352 | 2.7078 |
| SCE |  |  |  | 5.0044 | 2.2967 | 2.7078 |

b0 = 541/18 = 30.056

b1, b2 et b3 sont donnés dans le tableau ci-dessus donc :

Modèle : Yi**^** = 30.056 -0.2167 X1 + 0.3000 X2 +0.2333 X3

1. Quelles sont les conditions expérimentales de l’essai au centre du domaine en variables naturelles ?

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| °j | 1 | 2 | 3 |
| Xj | 0 | 0 | 0 |
| Uj | 25% | 150g | 24°C |

1. Compléter le tableau du 1°), expliquez vos calculs obligatoirement au 1/1000ème.

Somme Y = somme Y^ (propriété)

Somme des résidus = 0 (propriété)

SCE Y = 16265.0600 – 18\*(541/18)² = 5.004

SCE Y^= 16262.3522 – 18\*(541/18)² = 2.297

SCEe = SCe = 5.0044 - 2.2967 = 2.708

ei = yi – yi^

Y7**^** = 30.056 -0.2167 - 0.3000 +0.2333

1. Interprétations **concrètes** et compréhensibles par un non statisticien, de b0 et de b1

b0 : le taux de refonte est estimé égal à 30.056% quand PC = 25%, FP = 150g et T°t = 24°C

b1 : Quand le pourcentage de pate de cacao augmente de 25% le taux de refonte diminue de 0.2167%

1. Tester la validité du modèle (critère statistique obligatoirement au 1/1000ème). Tableau de l’ANOVA, Hypothèses et conclusion, on sait que la **p-value est égale à 0,031**.

H0 : CM  / CM e = 1

H1 : CM  / CM e >1 le modèle est satisfaisant (test unilatéral)

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Variation | SCE | ddl | CM | F calc |
| Régression | 2.2967 | 3 | 0.7655 | 3.958 |
| Résiduelle | 2.7078 | 14 | 0.1934 |  |
| Totale | 5.0044 | 17 |  |  |

Conclusion : Si on rejette H0 on a 3.1% de risque d’erreur de le faire à tort, ce risque est < à 5%, on rejette l’hypothèse H0, on a pu mettre en évidence que le modèle était satisfaisant.

1. Sans faire les calculs donner l’application numérique pour déterminer les variances suivantes :

²(b0) **=** 0.1934/18

²(bj) j différent de 0  **=** 0.1934/12

1. On va supposer que l’on retient les effets des 3 facteurs. A quels niveaux les fixeriez-vous pour répondre au problème de l’étude?

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| bj | Xj | **Pour minimiser le taux de refonte Y, les variables naturelles sont à fixer à :** |
| b1 <0 | X1 à +1 | **PC à 50%** |
| b2 >0 | X2 à -1 | **FP = 100g** |
| b3 >0 | X3 à -1 | **T° t = 22°C** |

**Exercice 2 (6 points) (15 min) :**

Pour compléter l’analyse, 4 essais ont été rajoutés aux 18 essais de l’exercice 1.

L’analyse des 22 résultats à partir du plan expérimental a donné les 4 matrices ci-dessous que vous devrez identifier (U’Y, B, information et dispersion), on a trouvé une p-value du test F égale à 0.26% et une variance résiduelle estimée égale à 0.1751.

U’U information B

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 22 | 550 | 3300 | 528 |  | 26,88 |
| 550 | 23750 | 82500 | 13200 |  | -0,0122 |
| 3300 | 82500 | 535000 | 79200 |  | 0,0059 |
| 528 | 13200 | 79200 | 12736 |  | 0,1094 |
| (U’U)-1 | dispersion |  |  |  | U’Y |
| 9,67045 | -0,00250 | -0,00375 | -0,37500 |  | 661,70 |
| -0,00250 | 0,00010 | 0,00000 | 0,00000 |  | 16420,00 |
| -0,00375 | 0,00000 | 0,00003 | 0,00000 |  | 99490,00 |
| -0,37500 | 0,00000 | 0,00000 | 0,01563 |  | 15887,80 |

1/ Tester la significativité de l’effet du facteur « Pourcentage de pate de cacao ». Hypothèses, conclusion. (Conserver au moins 5 chiffres après la virgule pour les calculs intermédiaires !)

H0 : beta 1 = 0

H1: beta 1 différent de 0 (effet du facteur mis en évidence)

La matrice de dispersion est celle en bas à gauche, elle est constituée des variances des bj dans la diagonale dans l’ordre de j = 0 à j = 3. La matrice des coefficients bj est celle qui est en haut à droite, les coefficients correspondent de haut en bas à b0, b1, b2, b3.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  (b1) | | = racine (0.1751\* 0.00010) = 0.00418 |
| t calculé | | = -0.0122/0.00418 = -2.91 |
|  | ddle = (22-1) — (4-1) = 18 | |

t0,9995 (18) = 3.922 < valeur absolue du t calculé < t0,995 (18) = 2.878

0.001<p-value < 0.01

On a pu mettre en évidence un effet très significatif (\*\*) du facteur « Pourcentage de pate de cacao » sur le taux de refonte des tablettes.

2/ Donner un intervalle d’estimation (au 1/10000ème) pour  = 0.01 de l’effet du facteur « Pourcentage de pate de cacao ».

b1 = - 0.0122

ddle = (22-1) — (4-1) = 18

t 0.995(18) = 2.878

(b1) = 0.00418

P( -0.0122- 2.878\*0.00418<1<- 0.0122- 2.878\*0.00418) = 0.99

P( -0.0242<1<-0.0002) = 0.99

Interprétation : Quand on augmente le pourcentage de cacao de 1%, il y a 1% de risque que le taux de refonte ne diminue pas d’une quantité comprise entre 0.0242% et 0.0002%